# I номер

1. Определение однородной, неоднородной, совместной, несовместной, определенной и неопределенной системы.  
     
   Система линейных уравнений является **однородной**, если свободный член каждого уравнения системы равен нулю.  
   Система линейных уравнений является **неоднородной**, если она не является однородной(один или несколько свободных членов уравнения не равны нулю)  
     
   Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.  
     
   Система называется **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.  
     
   Система называется **определённой**, если она совместна и имеет единственное решение.  
     
   Если система совместна и имеет более одного решения) система называется **неопределённой**.
2. Что такое матрица системы? А расширенная матрица?   
     
   **Матрица системы**- представление системы уравнений в матричном виде.  
     
   **Расширенная матрица**- матрица системы с дописанным справа столбцом со свободными членами.
3. Как записать систему в матричном виде (то есть перейти от системы к матричному уравнению)?  
     
   Берешь и расписываешь все по коэффициентам. Не очень понял в чем вопрос.
4. Используя матричную форму записи системы, докажите, что множество решений однородной системы образует линейное пространство.  
     
   **Доказательство**  
     
   Пусть - однородная система m линейных уравнений с n неизвестными. Тогда решением системы является столбец неизвестных , который мы рассматриваем как вектор из пространства столбцов высоты :  
   , где K- поле коэффициентов системы  
     
   Таким образом, множество решений системы есть множество столбцов из пространства столбцов , для которых верно матричное равенство .

Это множество является ядром матрицы А:

Ядро матрицы является векторным подпространством пространства столбцов, а следовательно, и само является векторным пространством.  
  
Множество решений НСЛАУ не образует линейное пространства (В этом множестве нет нуля, и само по себе множество ядром не является).

1. Дайте определение линейного пространства, линейного подпространства, линейной оболочки системы векторов.  
     
   **Линейное пространство** – Множество элементов называется линейным(векторным) пространством, если для любых двух его элементов определена сумма и для каждого элемента и каждого числа (взятого из фиксированного числового поля F) определено произведение , причем выполнены следующие условия(8 аксиом):

**Линейным подпространством** L n-мерного пространства R называется множество векторов, образующих линейное пространство по отношению к действиям, которые определены в R.

Другими словами, L называется подпространством пространства R, если из следует, что и если , то , где λ- любое вещественное число.

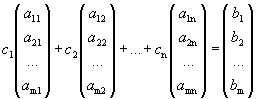
**Линейной оболочкой** системы называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов данной системы.

1. Дайте определение базиса линейного пространства  
     
   **Базисом** векторного пространства V называется всякая линейно независимая система векторов, порождающая пространство V.
2. Что такое ФСР?  
     
   **Фундаментальная Система Решений** - максимальный (n-r, где n-количество неизвестных, а r-ранг системы) набор линейно независимых решений этой системы.(Можно еще сказать, что это базис системы столбцов матричного представления СЛАУ)
3. Дайте два определения линейной зависимости и два определения линейной независимости. Докажите равносильность этих определений   
     
   Векторы векторного пространства R называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа не равные одновременно 0, (т.е не являются тривиальной комбинацией) что  
   Векторы, не являющиеся линейно зависимыми(то есть такой нетривиальной комбинации векторов, которая равна 0), то такие векторы называются **линейно независимыми**. (Первое определение)  
     
   Комбинация векторов называется **линейно зависимой**, если хотя бы один вектор из этой комбинации можно выразить через другие.  
     
   Если ни один из векторов в комбинации нельзя выразить через другие, то комбинация называется **линейно независимой**.(Второе определение)  
     
   **Докажем** равносильность этих определений. Вернемся к первой формулировке. , причем никакая из “альф” не равна 0. Это значит, что мы можем сделать так:  
     
   А потом так:  
     
   Что мы только сделали? Выразили первый вектор через другие. А это уже второе определение.
4. Что такое ранг матрицы? Что такое ранг системы векторов? Как эти понятия связаны друг с другом?  
     
   **Ранг матрицы**-наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы.  
     
   **Рангом системы векторов** называется максимальное число линейно независимых векторов системы.  
     
   Если векторы представить в матричном виде, то ранг матрицы=ранг системы векторов.
5. Может ли однородная система быть несовместной? А неоднородная?  
     
   **Нет**, ОСЛАУ все является совместной по определению (По умолчанию есть решение, где все неизвестные равны 0).  
     
   Неоднородная система **может** быть несовместной в случае, если ранг её основной матрицы не равен рангу её расширенной матрицы
6. Как связаны ранг матрицы системы, размерность пространства решений однородной системы и число неизвестных?  
     
   Ранг матрицы + размерность пространства решений однородной системы = число неизвестных.
7. Сформулируйте (а доказать сможете?) теорему Кронекера-Капелли  
     
   Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём:
   1. система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных;
   2. бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.

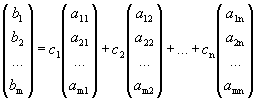
**Доказательство:**

Пусть - матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных

расширенная матрица системы

**Необходимость.** Пусть система совместна, тогда найдутся числа при подстановке которых в систему мы получим m тождеств, которые можно записать в виде одного векторного тождества: 

Следовательно, вектор-столбец свободных членов является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы , тогда добавление его к системе векторов-столбцов матрицы не меняет ранга системы. Отсюда .

**Достаточность.**   
  
Пусть . Следовательно, существует линейно независимая подсистема из r векторов-столбцов матрицы . Она же будет содержаться и в матрице . Так как эта система максимальна, то вектор-столбец свободных членов будет выражаться через эти r векторов-столбцов. Следовательно, вектор-столбец свободных членов можно представить в виде линейной комбинации всех векторов-столбцов матрицы , т.е. найдутся числа такие, что вектор-столбец будет представлен в виде  


Следовательно, числа являются решением системы, т. е. она совместна.

1. Расскажите про прямой и обратный ход метода Гаусса, разделение на базисные и свободные переменные.  
     
   Метод Гаусса включает в себя **прямой** (приведение расширенной матрицы к ступенчатому виду, то есть получение нулей под главной диагональю) и **обратный** (получение нулей над главной диагональю расширенной матрицы) ходы.   
     
   Если коэффициенты при r переменных совместной СЛАУ образуют базисный минор матрицы системы A, то эти r переменных называют **базисными или основными** (коэффициент при них отличен от нуля**).** Остальные переменных именуют **свободными или неосновными**. (Где n-количество переменных, а r-ранг системы)
2. Какие Вы знаете элементарные преобразования и элементарные матрицы? Какая связь между ними?  
     
   **Элементарными преобразованиями** строк называют:
   1. перестановку местами любых двух строк матрицы;
   2. умножение на ненулевую константу любой строки матрицы;
   3. прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на ненулевое число.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов.  
  
**Очевидно**, b и c связаны между собой. Так как мы можем умножать строку(столбец) на любую ненулевую константу, то мы можем также прибавлять умноженную на константу строку(столбец) к другой строке(столбцу)

1. Сформулируйте критерий существования ненулевых решений у неоднородной системы. А как он выглядит, если матрица системы квадратная?  
     
   Если ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы, то у этой системы есть ненулевые решения. Точно так же.
2. Какие системы называются эквивалентными (или равносильными)?  
     
   Две системы называются **эквивалентными** (**равносильными**) если их решения совпадают.
3. Какие Вы знаете методы решений системы с ненулевым определителем? Опишите их суть.  
     
    Метод Гаусса, Крамера и решение через обратную матрицу.  
   Гаусс – тупо приводим матрицу к треугольному виду и находим неизвестные, лол.  
   Крамер – Сначала находим определитель основной матрицы.  
   Затем находим определитель матрицы, в которой вместо i-го столбца стоит столбец свободных членов.   
   Обратная матрица – если то
4. Расскажите о двух способах поиска обратной матрицы.  
     
   **Способ первый**:  
   1. Сначала находим определитель матрицы.
   2. Находим матрицу миноров.
   3. Находим матрицу алгебраических дополнений
   4. Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений.

**Способ второй**:

1. К матрице A приписать единичную матрицу того же порядка.
2. Полученную сдвоенную матрицу преобразовать так, чтобы в левой её части получилась единичная матрица, тогда в правой части на месте единичной матрицы автоматически получится обратная матрица. Матрица A в левой части преобразуется в единичную матрицу путём элементарных преобразований матрицы.
3. Если в процессе преобразования матрицы A в единичную матрицу в какой-либо строке или в каком-либо столбце окажутся только нули, то определитель матрицы равен нулю, и, следовательно, матрица A будет вырожденной, и она не имеет обратной матрицы. В этом случае дальнейшее нахождение обратной матрицы прекращается.
4. Какова структура общего решения неоднородной системы? Докажите свою правоту  
     
   **Общее решение** неоднородной системы линейных уравнений может быть представлено в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и любого частного решения неоднородной системы   
     
   **Доказательство.** Пусть матрица является общим решением однородной системы . Т. е. .   
     
   Обозначим символическим выражением частное решение неоднородной системы . Т. е. .  
     
   Сложим и . Получается   
     
   Это тождество справедливо при любых значениях свободных параметров, входящих в общее решение .   
     
   Следовательно, матрица является общим решением матричного уравнения .